DE LA PUISSANCE DES ENSEMBLES INFINIS DANS ZFC

TEXTE A

Ce texte n'a pas pour but de démontrer, il s'agit d'une suite de réflexions personnelles, en toute liberté, sur la notion de relation et sur la démonstration du théorème (Cantor) relatif à la puissance de l'ensemble des parties d'un ensemble donné.

Nous appelons « puissance » ou « nombre cardinal » de M*, la notion générale que nous déduisons de* M *à l'aide de notre faculté de penser, en faisant abstraction de la nature des différents éléments et de leur ordre.*
G. Cantor, *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis.*

1. Définition
Dans ce document les dénominations "général" et "local" signifient, respectivement, "qui fait abstraction de la nature des objets[1] mis en relation" et "qui prend en compte la nature des objets mis en relation". Par "nature" j'entends l'ensemble des propriétés données par la définition de l'objet et qui en font son unicité, que ce soit en tant qu'élément et/ou en tant qu'ensemble, selon le contexte de la démonstration. On pourrait probablement utiliser aussi les termes "imprédicatif" et "prédicatif" ou encore "formel" et "naturel" ou encore "en extension" et "en intension", au lieu de "général" et de "local".
On définit ainsi, pour le raisonnement, deux niveaux de généralité.

La notion de relation

2.
2.1 Niveau général
Une relation étant un ensemble on peut se poser la question : comment déterminer qu'un ensemble D est une relation ?
Comme il existe des définitions générales pour certains types de relations, on peut préciser la question précédente : comment déterminer qu'un ensemble D est une relation binaire sur un ensemble E ? La réponse est donnée par la définition générale de la relation binaire : D est une relation binaire sur E si $D \subset E \times E$. Ceci est vrai quelle que soit la nature des éléments de E, car si E existe alors $E \times E$, dont la construction est indépendante de la nature des éléments de E, existe.

On ne s'intéressera désormais qu'aux relations binaires.

La définition générale décrit la structure que doit satisfaire toute partie D de $E \times E$ pour que D soit nécessairement une relation binaire sur E d'un certain type. Par exemple, pour que D soit une relation d'ordre strict il faut que :

$$\{(a,b),(b,c)\} \subset D \Rightarrow \{(a,c)\} \subset D \text{ et } \{(a,b)\} \subset D \Rightarrow \text{non}(\{(a,b),(b,a)\} \subset D),$$

La définition générale peut être utilisée pour démontrer, en faisant abstraction de la nature des éléments de E, qu'il existe sur E au moins une relation D d'un type donné.
On peut dire que la définition générale est la définition de la relation *quelconque* dans le type considéré. Elle ne désigne pas une et une seule occurrence particulière de D dans le type donné.
Exemple :
Soit $E = \{a,b,c\}$, les parties suivantes de $E \times E$, sont des relations d'ordre strict :

$$D_1 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\},\ D_2 = \{(a,c),(c,b),(a,b)\},\ D_3 = \{(b,a),(a,c),(b,c)\},$$
$$D_4 = \{(b,c),(c,a),(b,a)\},\ D_5 = \{(c,a),(a,b),(c,b)\},\ D_6 = \{(c,b),(b,a),(c,a)\}.$$

(Tout le raisonnement du texte B se déroule au niveau général. Le point de départ est la question :

[1] Dans ce contexte, les éléments d'un ensemble sont simplement distincts, ce qui est suffisant lorsque l'on traite de puissance.

étant donné un ensemble E comportant plus d'un élément, quelle est la structure que toute partie D de $E \times E$ doit satisfaire pour être une relation d'ordre strict, total, de domaine E et "discret[1]" ?)

2.2 Niveau local
Il existe une autre manière de définir une relation D sur E que j'appelle une définition locale de D. Elle identifie une et une seule occurrence de D dans un type donné en mettant en correspondance, grâce à leurs propriétés naturelles respectives, un élément $a \in E$ avec un élément $b \in E$ son image par D. La définition locale permet ainsi de construire D, couple par couple.

3. Remarques
3.1
Il n'est pas dit qu'à chaque occurrence de D définie au niveau général, correspond *toujours* une définition locale.

3.2
Si une relation n'appartient à aucun type (n'a pas de définition générale) elle ne peut avoir que des définitions locales. C'est le cas, par principe, de $\in$ et de $\notin$: soit une partie quelconque A de $E \times F$, il on ne peut dire, en se basant sur sa seule structure, si A est nécessairement une relation d'appartenance de E dans F.

3.3
Ce qui a été dit sur la relation est vrai pour l'application : une application de E dans F est une relation fonctionnelle de E dans F de domaine de définition E, c'est une partie de $E \times F$.

L'énoncé "Soit h une application surjective quelconque de E dans F" est correct car il existe une définition générale de ce type de relation.

L'énoncé "Soit une relation quelconque $\notin$ de E dans F" est incorrect car $\notin$ n'est pas un type de relation.

Le théorème de Cantor

4.

4.1 Enoncé

"Pour tout ensemble a l'ensemble des parties de a, $\mathscr{P}(a)$, est strictement plus puissant que a : $\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{\mathscr{P}a}}$.

Autrement dit, pour tout cardinal α $\alpha < 2^{\alpha}$, ou encore $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Ce théorème est donc une base de la théorie des Transfinis.

La preuve se fait par l'absurde. On veut démontrer qu'aucune application de a dans $\mathscr{P}(a)$ n'est surjective : $\left(\forall h \in (\mathscr{P}(a))^{a}\right)$(« h n'est pas une surjection »).
On suppose donc : $\left(\exists h \in (\mathscr{P}(a))^{a}\right)$(« h est une surjection »).
Selon l'axiome de sélection il existe $b \subset a$ tel que $b = \{x \in a; x \notin h(x)\}$.
Donc il existe $c \in a$ tel que $h(c) = b$. Mais $c \in b \Leftrightarrow c \notin h(c) \Leftrightarrow c \notin b$ ce qui est contradictoire.

4.2 Faut voir…

4.2.1 L'hypothèse
Par hypothèse h est surjective. elle est donc un élément quelconque de l'ensemble de toutes les appli-

[1] Le prototype de la relation d'ordre discret est la relation d'ordre naturel de l'ensemble N des entiers naturels.

cations surjectives de a dans $\mathcal{P}(a)$, autrement dit un élément de l'ensemble $H \in \mathcal{P}(a \times \mathcal{P}(a))$ de toutes les parties h de $a \times \mathcal{P}(a)$ qui vérifient :

1) pour tout $x \in a$ il existe un et un seul $y \in \mathcal{P}(a)$ tel que $(x, y) \in h$,
2) pour tout $y \in \mathcal{P}(a)$ il existe au moins un $x \in a$ tel que $(x, y) \in h$.

On est certain de n'oublier personne. ($h(x) = y$ est décidable puisque $(x, y) \in h \Rightarrow h(x) = y$. Mais h ainsi définie ne renseigne ni les propriétés de x ni celles de y : on se trouve dans un raisonnement général (imprédicatif). Il est important de noter que x et y sont donnés, dans ce contexte, comme éléments d'ensembles et sont donc de même niveau.

4.2.2 La preuve

La preuve s'appuie sur la relation d'appartenance. On ne peut procéder comme en 4.2.1 pour cette relation car elle n'a pas de définition générale (cf. 3.2), et, comme on se trouve dans un contexte général la formule $x \in h(x)$ n'est pas décidable (on ne peut ni la démontrer ni démontrer son contraire).

Si h était définie localement, h serait alors une formule $h =$ "si x a telle(s) propriété(s), alors $h(x) = y$ est une partie de a ayant telle(s) propriété(s)". x donné comme élément d'un ensemble et y comme ensemble d'éléments ne seraient pas de même niveau.

Comme h n'est pas définie localement, le recours - dans la preuve - à l'axiome de sélection est questionnable.

4.2.3 L'hypothèse cachée

Pour qu'il n'y ait plus de conflit il faut donc quitter le niveau général pour un raisonnement local, en supposant vraie une des deux conditions suivantes :

1) h a aussi une définition locale ($x \notin h(x)$ est alors décidable). Mais alors h n'est plus quelconque par rapport à H mais par rapport au sous-ensemble de H des applications surjectives ayant aussi une définition locale. Ce n'est pas ce que l'on cherche.
2) Toutes les applications de a dans $\mathcal{P}(a)$ ont une définition locale, ce qui permettrait de ne plus avoir qu'un niveau de généralité.

La démonstration (4.1) contient donc une <u>hypothèse cachée</u>.

4.2.4 Le mécanisme <u>formel</u> de l'hypothèse cachée

En logique standard[1] on ne peut écrire $x \in y$ que si x et y ne sont pas de même niveau : si x est donné comme élément d'un ensemble, y doit être donné comme ensemble d'éléments. Par conséquent on ne peut écrire $x \in h(x)$ que si h est localement définie.

En logique du premier ordre de ZFC $x \in h(x)$ est formellement acceptée dans les deux cas (même niveau ou niveaux différents). On peut donc, selon ce que l'on veut obtenir, faire comme si h était localement définie alors qu'elle ne l'est pas par hypothèse, et démontrer une proposition de portée générale à l'aide d'une preuve de portée locale.

Cette facilité utilisée dans l'argument diagonal - cest le cas de la démonstration 4.1 - permet de créer des <u>théorèmes indécidables</u>[2], imprédicativement/généralement indécidables mais prédicativement/localement valides! Ce concept est évidemment contradictoire puisque, par définiotion, un théorème est démontrable.

[1] Denis Vernant, *Introduction à la logique standard*, Flammarion Paris 2001
[2] Cette indécidabilité peut paraître étrange, mystérieuse, parce qu'elle est masquée par l'appartenance, ce qui n'enlève rien à sa réalité.

Le théorème de Cantor et AC

5.

5.1 D'hypothèse en hypothèse

Les textes encadrés sont de Mr Laurent Schwartz (*Analyse* I, Hermann, Paris, 1991).

> « DEFINITION 1.2.21 - Soient E et F deux ensembles. On dit que R est une relation binaire sur $E \times F$ si R est une partie de $E \times F$. IL est d'usage d'adopter la notation :
> (1.2.41) $(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$.
> [...]
> On dit aussi que R est le graphe de la relation. »

> « DEFINITION 1.2.22 - On appelle relation fonctionnelle dans $E \times F$ une partie $f \subset E \times F$ telle que :
> (1.2.43) $((x, y) \in f \wedge ((x, z) \in f) \Rightarrow y = z$. »

Dès lors toute partie de $E \times F$ telle que : $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(\forall z \in F)(y \neq z) \Rightarrow [(x, y) \in f \Rightarrow (x, z) \notin f)]$, est une relation fonctionnelle dans $E \times F$.

.

> « DEFINITION 1.3.1 - Soient E et F deux ensembles, f relation fonctionnelle sur $E \times F$ de domaine E. On dit alors qu'on a défini une application $f : x \mapsto y = f(x)$ de E dans F ou une fonction d'espace initial ou d'espace DE départ (ou encore de domaine de définition) E et d'espace final ou espace d'arrivée ou encore espace des valeurs F. $f(x)$ est appelé l'image de x par f et x est un antécédent de y.
>
> - En pratique c'est la correspondance $x \mapsto f(x)$ qui définit l'application. La relation fonctionnelle qu'on peut toujours écrire sous la forme $\{(x, f(x)) \in E \times F : x \in E\}$ est appelé le graphe de l'application *f.* »

« En pratique c'est la correspondance $x \mapsto f(x)$ qui définit l'application » : autrement dit, pour les démonstrations courantes on préfère utiliser la définition locale de l'application où la correspondance se présente sous la forme d'un énoncé définissant $f(x)$ en fonction de *x*, plutôt que l'ensemble des formules caractéristiques de la partie $f \subset E \times F$.

On sait que la définition locale désigne la partie correspondante de l'ensemble produit, elle ne la crée pas.

Question : Pour toute application selon 1.3.1 existe-t-il une définition locale ? (1)

> « THEOREME 1.3.7. - Soient E et F deux ensembles. Il existe un ensemble - noté F^E - dont les éléments sont les applications de E dans F.
>
> DEMONSTRATION : - En effet une relation fonctionnelle est une partie de $E \times F$ satisfaisant à une certaine propriété. Par suite
> $$\{G \in \mathscr{P}(E \times F) : G \textit{ est une relation fonctionnelle de domaine } E\}$$
> est bien un ensemble d'après l'axiome de sélection. »

Le nombre des applications de E dans F - autrement dit la puissance de F^E - ne dépend donc que de la puissance de ces deux ensembles. Il ne dépend ni de la nature de leurs éléments, ni des définitions locales des applications. (2)

Pour que 1.3.1, (2) et le théorème de Cantor soient satisfaits, la réponse à (1) doit être : toute application *f* de *E* dans *F* est une partie de $E \times F$ et possède une définition locale. De sorte que quel que soit *x* on peut démontrer que la formule $x \in f(x)$ est vraie ou fausse. Telle est l'hypothèse cachée.

Le théorème de Cantor est sauvé, mais la théorie se plante peu après[1], sur $2^{\aleph_0}$. On a alors recours à une autre hypothèse (HC, l'hypothèse du continu : $2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

5.2 Peut-on étendre l'hypothèse cachée à toute relation ?

A priori ce qui précède ne dépend pas de l'axiome du choix (AC), supposons donc que c'est vrai dans ZF, et qu'en outre l'hypothèse cachée s'étend à toute relation, la relation de bon ordre par exemple. On sait que la relation de bon ordre a une définition générale.

5.2.1
On se situe dans ZF.
On sait que l'énoncé « Il existe une relation de bon ordre sur $\mathscr{P}(\omega)$ » ne peut être démontré. On ne peut ni démontrer qu'il existe dans $(\mathscr{P}(\omega))^2$ une partie satisfaisant la définition générale de la relation de bon ordre ni exhiber la définition locale d'une telle relation. Et ceci est vrai pour tout ensemble équipotent à $\mathscr{P}(\omega)$ de puissance $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. En effet si deux ensembles *E* et *F* sont équipotents alors E^2 et F^2 ont la même structure (dans mon charabia : ils sont structurellement isomorphes) et si l'on démontre que E^2 contient une relation de bon ordre sur *E*, alors on a aussi démontré que F^2 contient une relation de bon ordre sur *F*, et réciproquement. On peut ainsi dire que tous les ensembles équipotents à *N* sont bien ordonnés, car la relation d'ordre naturel sur *N* est une relation de bon ordre.

On ne peut démontrer le théorème de bonne ordonnance sans contredire le théorème de Cantor : affirmer, dans ZF, que tout ensemble peut être bien ordonné revient à nier l'existence de tout ensemble de puissance $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

5.2.2
Dans ZFC, tout s'arrange grâce à AC (l'axiome du choix), et au théorème de Zermelo (théorème de la bonne ordonnance).

Avec AC on peut dire[2] : la définition locale est une preuve suffisante mais non nécessaire de l'existence d'un ensemble. On admet ainsi l'existence éventuelle d'ensembles n'ayant pas de définition locale. AC contredit donc le théorème de Cantor et ce que l'on a appelé hypothèse cachée qui le supporte.

L'argument diagonal, dont le pivot est l'appartenance, est un argument local.

Le théorème de Cantor (4.1) s'énonce donc :
"Aucune application de *a* dans $\mathscr{P}(a)$, pour laquelle il existe une définition locale, n'est surjective".

L'argument diagonal appliqué sur l'intervalle $I =]0,1[\subset R$ permet de démontrer que si on ne fait pas abstraction de la nature de ses éléments, *I* ne peut être mis sous la forme d'une suite dénombrable.

5.2.3
En résumé:
Dans ZFC cohabitent donc deux théories, l'une, la théorie des transfinis - valide grâce au concept à la fois sophistiqué et élégant de théorème indécidable - affirmant que tous les ensembles infinis n'ont pas même puissance, et où HC est indécidable, et l'autre, le texte B - tout simplement valide - affirmant que tous les ensembles infinis ont même puissance, et où HC est évidemment vraie[3].

[1] L'indécidabilité est héréditaire, se transmet.
[2] Pour plus de détails voir, par exemple : Erich Kamke, *Théorie des ensembles*, Editions Jacques Gabay, 1993.
[3] Voir message n° 110 page 5 de la discussion dont le lien est donné en page d'accueil.

La fuite en avant

6.

Ce qui suit n'est pas une preuve et s'inspire largement du chapitre 3 paragraphe 18 de "*Théorie des ensembles*" par E. Kamke, ouvrage déjà cité, et d'un excellent cours sur le même sujet, dont on peut trouver la référence sur le web, avec un peu de persévérance. Il y est question de certains problèmes rencontrés lors de l'élaboration de la théorie axiomatique des ensembles. Dans son cours, l'auteur écrit "imprédicatif" là où je dis "général" au début du texte A.

6.1
Au départ, 1890, il y a la théorie des ensembles de Cantor : théorie naïve (pas d'axiomes, pas de logique spécifiée) dans laquelle la définition de la notion d'ensemble "*groupement d'objets bien distincts de notre intuition et de notre pensée*" est trop large et mène à des paradoxes.

6;2
Pour éliminer ces paradoxes on[1] a opté pour une définition plus restrictive donc plus sure de la notion d'ensemble. On obtient ainsi une théorie axiomatique prédicative où tout ensemble est - je cite Kamke - "*déterminé par les propriétés que possèdent ses éléments ou qu'on leur attribue*"[2].
Dans cette théorie les deux propositions "toute application de X dans Y …" et "toute application prédicative de X dans Y …" sont équivalentes.

Mais, dans cette théorie purement prédicative on ne peut pas donner une définition prédicative à toutes les parties de $\mathbb{N}$, seulement à un nombre dénombrable d'entre elles. En outre la collection[3] de tous les réels compris entre 0 et 1 n'est pas un ensemble (travaux de E; Borel et L. E. J. Brouwer). La théorie prédicative ne permet donc pas de formaliser toute l'Analyse. Ce qui est difficilement admissible (principe de conservation optimale exige).

6.3
Pour formaliser toutes les mathématiques, au lieu de résoudre les problèmes par la logique formelle[4] et ses démonstrations ("*conception étroite*" selon Kamke) on a adopté une syntaxe moins stricte, donc moins sure, en introduisant l'axiome de l'ensemble des parties :

> " *notre intention n'est précisément pas d'asseoir une conception étroite ; nous voulons, au contraire, et par la formation de concepts aussi étendus que possible, ouvrir aux mathématiques un champ aussi vaste que possible*.".

C'est le principe de la fuite en avant.

Ainsi donc l'axiome de sélection justifie la théorie des transfinis et l'axiome de l'ensemble des parties permet la formalisation de l'Analyse, de raccommoder le continu ensembliste et le continu mathématique.

On peut se demander si la formalisation de toutes les mathématiques ne pourrait se faire avec l'axiome des parties sans la théorie des transfinis, mais comme cette théorie a été validée par la CS il y a prescription!

L'axiome de l'ensemble des parties ne fait que nier les problèmes cités en 6.2, il ne les résout pas.
On se trouve ainsi dans la situation où, A étant un ensemble :

- d'une part l'axiome de sélection (approche prédicative) dit :
  toute collection d'éléments de A vérifiant une même propriété P est un ensemble appelé partie ou sous-ensemble de A.,
- d'autre part l'axiome de l'ensemble des parties (approche imprédicative, celle de l'art combinatoire) dit :
  toute collection d'éléments de A est un ensemble appelé partie ou sous-ensemble de A.

[1] on = la communauté scientifique (CS)
[2] chaque propriété devantt être exprimable par une formule du premier ordre.
[3] collection = *groupement d'objets bien distincts de notre intuition et de notre pensée*.
[4] Le formalisme est un garde-fou face au manque de fiabilité de notre entendement. Il évite que l'on introduise dans un raisonnement rationnel des éléments subjectifs ou conjoncturels : opinions, convictions, idées reçues du moment… L'axiome (avec éventuellement une logique de circonstance) permet de faire sauter ce verrou. On est en philosophie, tout est dit.

Ou encore:

- On peut dire qu'une partie d'un ensemble A est a) une collection d'éléments de A et b) un ensemble.
- Selon le point 6.2 il peut exister des collections d'éléments de A qui ne sont pas des ensembles (et qu'on ne peut donc pas appeler parties de A).
  Mais l'axiome de l'ensemble des parties, pour remédier aux problèmes cités dans 6.2, implique que toute collection d'éléments de A est une partie de A, donc un ensemble.
  Il peut donc exister des collections d'éléments de A qui sont et ne sont pas des ensembles.

En résumé :
Avec l'axiome de l'ensemble des parties, on donne à la logique formelle le droit de se contredire.

Conclusion de Kamke :
Il a fallu prendre des risques… mais les résultats étant là, on continue tant que l'on ne rencontre pas de "*contradictions sérieuses et insolubles*".
? Une contradiction dite *non sérieuse* pourrait être contournée par un ou plusieurs axiomes ?
? Une contradiction dite *sérieuse* obligerait la CS à se dédire (en reniant la pluralité cardinale de l'infini, par exemple) ?

6.4
Les problèmes étant têtus, le nouveau formalisme, ZFC, nous dit que - dans le contexte de la pluralité cardinale de l'infini - HC (formulée par Cantor en 1890) est indécidable (1963). On (la CS) va donc à nouveau élargir le formalisme en le gavant d'axiomes et de logiques adéquats…Il finira bien par nous dire si HC est vraie ou si HC est fausse. On y arrivera[1].
(Même si HC était décidée fausse par ZFC élargi, la pluralité cardinale de l'infini ne serait pas mise en cause (il y aurait d'autres cardinaux entre le dénombrable et le continu). C'est donc sans risque.)

> *Notre raison est capable de tisser cent autres mondes et d'en trouver les principes et la contexture. Il ne lui faut ni matière ni base : elle bâtit aussi bien sur le vide que sur le plein, et avec du néant qu'avec de la matière.*
>
> Montaigne, *Essais* Livre III, chap. 11

[1] cf. http://math.unicaen.fr/~dehornoy/Surveys/Dgy.pdf

ANNEXE

A-1 Du renfort

> Jean-Marie Pruvost-Beaurain[1] :
> *« Une correspondance de E vers F est un triplet (E, F, G) tel que G soit une partie de E×F ; les ensembles E, F et G sont appelés respectivement ensemble de départ (ou ensemble source), ensemble d'arrivée (ou ensemble but) et graphe de la correspondance k = (E, F, G).*
> […]
> *Une relation binaire dans E est une correspondance de E vers E ; lorsque R = (E, E, G) est une relation* binaire *dans E, on convient en général d'écrire « R(a, b) » pour signifier « (a, b) ∈ G ». »*

- La correspondance entre la première projection du couple (a, b) à la deuxième projection est établie par un énoncé, une formule, grâce aux propriétés de ces deux éléments.
  Cette formule constitue la définition locale de la relation. Son niveau de généralité est le particulier : elle désigne par son graphe une relation particulière, unique.

> Jean Ladrière[2] :
> *« Ce qui donne à la notion de relation un rôle de premier plan dans les problèmes fondationnels, c'est qu'elle est à la base de la notion de structure. Intuitivement, on pourra dire qu'une certaine entité complexe est structurée si on peut discerner des relations caractéristiques reliant les éléments de cette entité. Ce qui est propre à l'idée de structure, c'est la forme en tant que telle. Une structure se réalise en fait à travers des relations déterminées, reliant des entités appartenant à un domaine déterminé ; mais la structure comme telle est indépendante de ces relations et de ce domaine. De façon plus précise, une structure est définie par des propriétés formelles de relation, c'est-à-dire par des propriétés susceptibles de caractériser une relation en tant que telle, abstraction faite de la nature particulière des entités sur lesquelles elle opère et des aspects particuliers dont elle peut être affectée elle-même du fait qu'elle a tel ou tel domaine d'entités pour champ d'application. Ainsi, la réflexivité, la symétrie, la transitivité sont des propriétés formelles de relations. »*

- Ces propriétés formelles constituent ce que j'ai appelé la définition générale de la relation. Elles décrivent (une fois traduites en axiomes) la structure du graphe de la relation. Ainsi, es formules du paragraphe 1.1 dans le texte B sont les axiomes de la structure du graphe de la relation D.
- Si cette structure existe alors le graphe est structuré, alors, puisque la relation est représentée par son graphe, la relation est structurée.
- Le graphe structuré introduit un niveau de généralité que j'ai qualifié général : on peut en effet atteindre tous les graphes possédant la même structure, autrement dit toutes les relations d'un même type (par exemple toutes les applications surjectives).
- Il est évident que l'appartenance n'est pas une relation structurée.

> Jean Ladrière (suite) :
> *« Les* Éléments de mathématique *de N. Bourbaki prennent le concept de structure comme concept fondamental : ils présentent les mathématiques comme la science des structures. Ainsi, la théorie des ensembles ordonnés étudie en fait les structures d'ordre, c'est-à-dire les structures définies par une relation d'ordre. Or ce qui caractérise une relation comme relation d'ordre, ce sont certaines propriétés formelles (asymétrie et transitivité) qui sont indépendantes des ensembles particuliers que la relation ordonne et de l'espèce particulière d'ordination dont il s'agit. Ces considérations peuvent se généraliser pour des structures plus compliquées. L'une des conditions essentielles dans la définition d'une structure, c'est le carac-*

[1] *Structures algébriques*, Encyclopædia Universalis 2005
[2] *Relation*, Encyclopædia Universalis 2005

tère transportable de la relation qui la spécifie (cf. N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Théorie des ensembles*, chap. IV, paragr. 1, 3 et 4). Intuitivement, on peut exprimer cette condition en disant que cette relation doit être indépendante de son support (qui est de nature ensembliste) ; or ce par quoi elle a ce caractère, c'est son aspect formel. »*

- Il est évident que la relation d'appartenance n'est pas transportable.