DE LA PUISSANCE DES ENSEMBLES INFINIS DANS ZFC

TEXTE B

Introduction

● Schéma de démonstration

L'objectif de ce texte (document) est de démontrer, en trois étapes, que deux ensembles infinis sont équipotents et de puissance dénombrable.

Première étape (chapitre 1)
on se donne les définitions d'un ensemble *E* contenant au moins deux éléments et d'une partie $D \subset E \times E$. (1.1)

La définition de *D*, en décrivant l'interdépendance des couples qui la composent, se fait par sa structure. Au chapitre suivant on montrera que cette dernière est une relation d'ordre. La définition de *D* est indépendante de la nature des éléments de *E* et de la signification (ou définition en intension) de la relation d'ordre. Toutes les démonstrations qui suivent respectent cette double indépendance.

On montre qu'il existe toujours au moins une partie de $E \times E$ satisfaisant la définition de *D*. (1.3.1)

Deuxième étape (chapitre 2)
a) On démontre que *D* est une relation d'ordre "discret" (i.e. ses caractéristiques sont celles de la relation d'ordre naturel de l'ensemble *N* des entiers naturels).
C'est une relation d'ordre strict (2.1). On s'intéresse aux notions de successeur immédiat et de prédécesseur immédiat (2.2), d'élément initial et d'élément final (2.3) pour conclure en (2.4).
b) On démontre que *D* est totale et qu'il existe au moins une relation *D* telle que *E* est totalement ordonné par *D* avec élément initial. (2.5 à 2.7)

Troisième étape (chapitre 3)
La relation *D* permet de classer les fichiers en deux types : le type F et le type I. (3.1)
On démontre que deux ensembles de type I sont équipotents (3.2)
Comme *N* est un ensemble de type I, tout ensemble de type I est équipotent à *N* et est infini dénombrable (3.3)
On démontre que tout ensemble de type *F* est fini (3.4).
Donc deux ensembles infinis sont équipotents dénombrables (3.5)

Incidemment – ce n'était pas le but recherché – on démontre que tout ensemble infini est doté d'une relation de bon ordre "discret".

● Remarques sur la notation

Dans une formule les variables sont les couples de l'ensemble E^2 , et non pas les éléments de *E* qui les forment. Ainsi, soient les couples (*a*,*b*), (*b*,*c*), (*a*,*c*) et (*b*,*a*); *a*, *b* et *c* sont exhibés uniquement pour *visualiser* les relations structurelles liant ces couples grâce à leur structure interne.
D'autre part : $((a,b) \in D$ et $(c,d) \in D)$ s'écrira : $(a,b),(c,d) \in D$; $(\forall (a,b) \in D$ et $\forall (c,d) \in D)$ s'écrira : $\forall (a,b),(c,d) \in D$

1. Le sous-ensemble *D*

1.1 Définition

● *E* est un ensemble quelconque ni vide ni singleton. *D* est une partie de $E \times E$ définie par les règles[1] suivantes a, b, c, x, y, z sont des éléments de *E* :

(R1) *D* est la réunion de deux parties disjointes, *A* et *B*, de $E \times E$:
B peut être vide,
$D = A \cup B,\ A \cap B = \varnothing$,
$D \cap \Delta = \varnothing$, où Δ est la diagonale (elle contient tous les (x,x)) de $E \times E$.

(R2) $(x,y) \in A \Rightarrow (y,x) \notin D$.

(R3) $(a,b),(x,y) \in A \Rightarrow$ ou $(b,x) \in D$ ou $(y,a) \in D$
$((b,x),(y,a) \notin D \Rightarrow$ non$((a,b),(x,y) \in A)$
On peut avoir $a = x$, ou $b = y$.

(R4) (R4.1) $(a,c) \in B \Leftrightarrow \exists (a,x),(x,c) \in D$
et
(R4.2) ou $(a,c) \in B \Leftrightarrow \exists (a,x),(x,c) \in A$,
ou $(a,c) \in B \Leftrightarrow \exists (a,x),(z,c) \in A$ et $\exists (x,z) \in D$ cas : $(a,x) \in A, (x,c) \in B$
ou $(a,c) \in B \Leftrightarrow \exists (a,y),(x,c) \in A$ et $\exists (y,x) \in D$ cas : $(a,x) \in B, (x,c) \in A$
ou $(a,c) \in B \Leftrightarrow \exists (a,y),(z,c) \in A$ et $\exists (y,z) \in B$ cas : $(a,x) \in B, (x,c) \in B$

● On dira que l'élément *a* de *E* est *représenté* dans *A* (resp. *B*, *D*), si il existe un *x* tel que :
ou $(a,x) \in A$ ou $(x,a) \in A$ (resp. *B*, *D*).

1.2 Remarques

- (R4.2) montre que les éléments de *E* représentés dans *B* sont aussi représentés dans *A* : *a* par (*a*,*x*), *c* par (*x*,*c*) ou (*z*,*c*), *x* par (*a*,*x*), *z* par (*z*,*c*).
- *B* est vide si *E* ne possède pas plus de deux éléments.

1.3 Existence de *D*

1.3.1
Par définition tous les éléments de *A* et de *B* appartiennent à $E \times E$.
Il existe toujours un *D* : prendre $A = \{(a,b)\}, B = \varnothing$.

[1] Ces règles ne sont pas des règles de construction.

2. La relation *D*

Désormais $(a,b) \in D \Leftrightarrow aDb$

2.1 <u>*D* est une *relation d'ordre strict*</u>

- *D* est transitive : $(a,x),(x,c) \in D \Rightarrow (a,c) \in D$. par (R4.1)

- Il faut démontrer $(x,y) \in D \Rightarrow \text{non}((x,y),(y,x) \in D)$.
  (R1) exclut $((x,y) \in A \text{ et } (x,y) \in B)$.
  (R1) et (R2) signifient : $(x,y) \in A \Rightarrow \text{non}((x,y),(y,x) \in D)$,
  Il reste à démontrer que . $(x,y) \in B \Rightarrow \text{non}((x,y),(y,x) \in D)$
  La démonstration applicable à tous les cas (R4.2) :
  1. Hypothèse : $(x,y),(y,x) \in B$.
  2. $(x,y) \in B \Leftrightarrow \exists (x,a),(b,y) \in A \text{ et } \exists (a,b) \in D$ par (R4.2).
  3. $(y,x) \in B \Leftrightarrow \exists (y,c),(d,x) \in A \text{ et } \exists (c,d) \in D$ par (R4.2).
  4. $(x,a) \in A \text{ et } (a,x) \in D$ par 2, (R4.1) sur 2 et 3.
  5. 4 contredit (R2).
  6. Donc : $(x,y) \in B \Rightarrow \text{non}((x,y) \in B \text{ et } (y,x) \in B)$.
  7. $\text{non}((x,y) \in A \text{ et } (y,x) \in A)$ par (R2).
  8. $(x,y) \in B \Rightarrow \text{non}((x,y) \in D \text{ et } (y,x) \in D)$ par 6 et 7.

2.2 <u>Propriétés de *D*</u>

- Si $(a,b) \in D$ est tel que $(\forall (a,x)(x,b) \in E \times E)((a,x)(x,b) \notin D)$, *b* est dit successeur immédiat de *a* ($b = a^+$), *a* est dit prédécesseur immédiat de *b*.

- (R4.1) montre que si $(a,b) \in B$ alors *b* n'est pas successeur immédiat de *a* et *a* n'est pas prédécesseur immédiat de *b*.
  On démontre que si $(a,b) \in A$ alors *b* est successeur immédiat de *a* et *a* est prédécesseur immédiat de *b*.
  1. Hypothèse : $(a,b) \in A, (a,x),(x,b) \in D$
  2. $(a,x),(x,b) \in D \Rightarrow (a,b) \in B$ par (R4.1)
  3. $A \cap B = (a,b)$ par 1 et 2
  4. 3 contredit R1.
  5. $(a,b) \in A \Rightarrow (a,x),(x,b) \notin D$

- Le successeur immédiat est unique
  1. Hypothèse : $(x,a),(x,b) \in A$
  2. $(x,a) \in A \Rightarrow (a,x) \notin D$ *D* est stricte
  3. $(x,b) \in A \Rightarrow (b,x) \notin D$ *D* est stricte
  4. $(a,x),(b,x) \notin D \Rightarrow \text{non}((x,a) \in A \text{ et } (x,b) \in A)$ par (R3)
  5. 4 contredit 1
  6. $\text{non}((x,a) \in A \text{ et } (x,b) \in A)$.

- Le prédécesseur immédiat est unique
  1. Hypothèse : $(a,x),(b,x) \in A$
  2. $(a,x) \in A \Rightarrow (x,a) \notin D$ *D* est stricte
  3. $(b,x) \in A \Rightarrow (x,b) \notin D$ *D* est stricte
  4. $(x,a),(x,b) \notin D \Rightarrow \text{non}((a,x) \in A \text{ et } (b,x) \in A)$ par (R3)
  5. 4 contredit 1

6. non($(a,x)\in A$ et $(b,x)\in A$).

2.3 Elément initial (mod. D), élément final (mod. D)

- Si m est élément initial (mod. D), m est unique.
  1. hypothèse : $(m,a),(m',a)\in D$ (m et m' sont initiaux)
  2. m et m' étant représentés dans A : $(m,z),(m',y)\in A$
  3. par (R3) sur 2 :
     ou $(z,m')\in D$ et alors $(m,m')\in D$ par (R4.1), ce qui est impossible car m' est initial,
     ou $(y,m)\in D$ et alors $(m',m)\in D$ par (R4.1), ce qui est impossible car m est initial.
  4. (R3) est contredit par 3. Donc :
     $(m,a),(m',a)\in D \Rightarrow m=m'$.
     Remarque : on a supposé ci-dessus $y\neq z$. Si $y=z$ on a $(m,y),(m',y)\in A$, ce qui est impossible car y ne peut avoir deux prédécesseurs immédiats.

- Si n est élément final (mod. D), n est unique.
  1. hypothèse : $(a,n),(a,n')\in D$ (n et n' sont finals)
  2. n et n' étant représentés dans A : $(z,n),(y,n')\in A$
  3. par (R3) sur 2 :
     ou $(n,y)\in D$ et alors $(n,y),(y,n'\}\in D\Rightarrow(n,n')\in D$ par (R4.1), ce qui est impossible car n est final,
     ou $(n',z)\in D$ et alors $(n',n)\in D$ par (R4.1), ce qui est impossible car n' est final.
  4. (R3) est contredit par 3. Donc :
     $(a,n),(a,n')\in D\Rightarrow n=n'$.
     Remarque : on a supposé ci-dessus $y\neq z$. Si $y=z$ on a $(y,n),(y,n')\in A$, ce qui est impossible car y ne peut avoir deux successeurs immédiats.

- Si m et n sont respectivement élément initial (mod. D) et élément final (mod. D), ils sont distincts.
  1. hypothèse : $m=n$, donc $(a,m),(m,a)\in D$)
  2. 1 ne peut être vraie car D est stricte.
  3. donc $m\neq n$.

2.4 Propriétés de D (fin)

- Si c n'est pas élément initial (mod. D), alors c a un prédécesseur immédiat.
  Comme c n'est pas élément initial il existe un $(m,c)\in D$. Si $(m,c)\in A$ alors m est prédécesseur immédiat de c, par définition. Si $(m,c)\in B$ alors (R4.2) nous dit qu'il existe un $(x,c)\in A$ où x est le prédécesseur immédiat de c.

- Si b n'est pas élément final (mod. D), alors b a un successeur immédiat.
  Comme b n'est pas élément final il existe un $(b,n)\in D$. Si $(b,n)\in A$ alors n est le successeur immédiat de b par définition. Si $(b,n)\in B$ alors (R4.2) nous dit qu'il existe un $(b,x)\in A$ où x est le successeur immédiat de b.

2.5 D est totale

On dira ici que le domaine de D est la partie de E dont les éléments sont représentés dans A.
Soient deux éléments quelconques de E représentés dans A, ils sont comparables soit par (R4.2), soit par (R3). D est donc totale. Le domaine de D est donc totalement ordonné par D.

2.6 <u>Elément initial dans *D*</u>

2.6.1 <u>Remarque</u>
Dans la relation $D = A \cup B$, *B* se déduit de *A* par application de (R4). En déterminant *A* on détermine donc *B*.

2.6.2 <u>Remarque</u>
A peut avoir plusieurs formes :
1) {(a,b),(b,x),(x,c)}: a est élément initial , c est élément final.
2) {(a,b),(b,x),(x,c),...}: a est élément initial, pas d'élément final..
3) {...,(a,b),(b,x),(x,c)}: c est élément final, pas d'élément initial.
4) {...,(a,b),(b,x),(x,c),...}: ni élément initial ni élément final.

2.6.3 <u>Remarque</u>
Soient *X* et *Y* deux ensembles disjoints dotés respectivement des relations d'ordre de type D $D_X = A_X \cup B_X$ et $D_Y = A_Y \cup B_Y$. D_X possède un élément initial mais pas d'élément final tandis que D_Y ne possède ni élément initial ni élément final. Soit $Z = X \cup Y$.

La relation d'ordre $D_z = A_Z \cup B_Z$ telle que :

1) $A_Z = A_X \cup A_Y$
2) $B_z \supset B_x \cup B_Y$
3) $(\forall a \in X, \forall x \in Y)((a,x) \in B_Z)$

est-elle de type D (i.e. vérifie la définition 1.1) ?

On pose : $a,b,c,d \in X$ et $w,x,y,z \in Y$. D_z étant de type D on peut écrire :
$A_Z = \{(a,b),(b,c),(c,d),...(w,x),(x,y),(y,z),...\}$
Il est évident (unicité du successeur immédiat) que tout couple de $D_Z \times D_Z$ dans lequel le premier élément appartient à *X* et le second à *Y* ne peut appartenir à A_Z.
L'existence de (*a,z*) dans B_z n'est pas justifiée, car

$(a,z) \in B_Z \Rightarrow (a,b),(y,z) \in A_Z$ et $(b,y) \in B_Z$ (R4.2)
$(b,y) \in B_Z \Rightarrow (b,c),(x,y) \in A_Z$ et $(c,x) \in B_Z$ (R4.2)
$(c,x) \in B_Z \Rightarrow (c,d),(w,x) \in A_Z$ et $(d,w) \in B_Z$ (R4.2)
$(d,w) \in B_Z \Rightarrow ...$ (à l'infini)
(Pour que la "descente à l'infini" cesse il faudrait qu'il existe :
$(m,v) \in B_Z \Rightarrow (m,u),(u,v) \in A_Z$, où $m \in X, u \in Y, v \in Y$,
ou $(m,v) \in B_Z \Rightarrow (m,t),(u,v),(t,u) \in A_Z$, où $m \in X, t \in Y, u \in Y, v \in Y$).

D_z n'est pas totale car *a* et *z* ne sont pas comparables. D_z n'est pas un relation de type D.
Autrement dit, <u>la relation de type D ne contient pas de "puits sans fond"</u>.

2.7 <u>*E* est totalement ordonné par *D*</u>
On suppose désormais que *D* est dotée d'un élément initial.

2.7.1 <u>Théorème</u>
Tout ensemble ayant plus d'un élément peut être totalement ordonné par une relation D avec élément initial.

<u>D'après 1.1</u> :
D est stricte, totale, discrète. *A* est la chaîne des successeurs immédiats dans D. Chaque élément de *A* est un maillon de la chaîne, deux maillons sont chaînés si le second élément de l'un est le premier élément de l'autre. Tous les éléments du domaine de D sont représentés dans *A*. Les règles de 1.1 assurent la linéarité de la chaîne[1].

[1] Je l'ai montré pour le "puits sans fond" (2.6.3), chacun peut aisément s'en assurer pour les autres cas, plus simples.

Question :

E peut-il être domaine de définition de D ? Autrement dit : La chaîne *A* où tous les éléments de *E* sont représentés est-elle une partie de $E \times E$?
Réponse :
Oui, car cette chaîne, où tous les éléments de *E* sont représentés, est l'image $f(E)$ d'une des applications[1] *f* de *E* dans $E \times E$ telles que : *a* est première projection (premier élément) du couple $f(a)$ et, pour tout $x \neq a$ *x* est deuxième projection de $f(x)$. *a* n'est pas fixé et peut donc différer d'une application *f* à l'autre.
On sait que $(x, y) \in A$ signifie que *x* (première projection) est, dans la relation d'ordre *D*, le prédécesseur immédiat et unique de *y* et que *y* (deuxième projection) est, dans la relation d'ordre *D*, le successeur immédiat et unique de *x*. On en déduit facilement qu'un élément de *E* ne peut être première projection que d'un seul élément de *A*, la même règle s'appliquant pour la deuxième projection.
Appelons *a* l'élément initial de *D*. N'ayant pas de prédécesseur immédiat *a* est première projection d'un seul élément de *A* que l'on peut donc désigner comme *f*(*a*). Tout *x* différent de *a* est successeur immédiat d'un autre élément de *E*, il est donc seconde projection d'un seul élément de *A* que l'on peut désigner comme *f*(*x*).

Existence de *f*

E étant , par définition, un ensemble, $E \times E$ est un ensemble (et il existe puisque *E* existe) selon le théorème de l'ensemble produit (le produit de deux ensembles est un ensemble), donc $E \times (E \times E)$ est aussi un ensemble (et il existe) pour la même raison.
Si f est une relation de *E* dans $E \times E$ elle doit être un ensemble appelé graphe. Ce graphe doit être une partie de $E \times (E \times E)$.
Quel que soit *x* de E, il existe toujours un $f(x) = (g, x)$ car pour tout $g \in E$ $(g, x) \in (E \times E)$. Le graphe de *f*, la collection des (x,((g,x)), est donc une partie de $E \times (E \times E)$, donc un ensemble, Il est évident que l'image de *f*, la collection des (g,x), est une partie de $E \times E$ donc un ensemble.

remarque : pour chaque graphe *f* : tout élément de *E* a une et une seule entrée dans ce graphe car *f* est une application. alors que dans $E \times (E \times E)$ chaque élément de *E* a une entrée pour chaque élément de $E \times E$.

Illustration: :

$E = \{a, x, y, z, ...\}$

$E \times E = \{(a,b), (a,x), (x,y), ...\}$

$E \times (E \times E) = \{(a,(a,x)), (a,(a,y)), (x,(y,z)), (x,(y,x)), ...\}$

$f(E) = \{(a,(a,x)), (x,(y,x)), ...\} \subset E \times (E \times E)$; $f(a) = (a,x)$, $f(x) = (y,x)$

$I = \{(a,x), (y,x), ...\} \subset E \times E$

Existence de *A*

Comme ci-dessus *a* désigne l'élément initial de la relation *D* (supposée sans élément final), *I* est l'image de *f*. Chaque élément de *I* est désigné par c_x où *x* est 2ème projection .
On choisit *f* telle que $f(a) = f(b) = (a,b)$ et *a* occupe toutes les 1ère projections des c_x. c_b=(*a*,*b*) est le premier maillon, le point de départ de la chaîne *A* que l'on veut construire. *I* est évidemment une partie de l'ensemble produit $E \times E$. On peut modifier - sauf pour c_b - toute 1ère projection des c_x, *I* reste une partie de $E \times E$ et l'image d'une application *f* où tous les éléments de *E* sont représentés en 2ème projection sauf pour *a* en 1ère projection.

[1] La notion d'application garantit que le raisonnement qui va suivre concerne la totalité des éléments de *E* dont on n'a donc que faire de la puissance.

On suppose qu'il existe toujours[1] dans *I* un c_x, différent de c_b, dont la 1[ère] projection est *a*.
Par ex. $c_d=(a,d)$. On le chaîne avec $c_b=(a,b)$ en y substituant *b* à *a* (on est en mode imprédicatif),.On dit que c_d est *intégré* dans la chaîne *A* et que $c_d=(a,d)$ est le *successeur* de c_b dans *I*.
Cette substitution[2] s'appuie sur le fait qu'il existe[3] une application f' et $f'(a)=(a,b)$ ne différant de *f* que par la présence dans son image de (b,d) au lieu de (a,d). Il est évident que c_b est intégré sans substitution.
On utilise ce même procédé pour intégrer le successeur dans *I* de c_d dans la chaîne *A*, en construisant le maillon successeur de (b,d) dans *A*.

On voit que si un élément de *I* est intégré dans *A* alors son successeur dans *I* est intégré dans *A*.
On raisonne par récurrence[4] sur *I* :

1) c_b est intégré dans la chaîne *A*,
2) si c_x est intégré dans la chaîne *A* alors son successeur dans *I* est intégré dans la chaîne *A*.
Donc :
Tous les éléments de *I* sont intégrés dans la chaîne *A*.

I est ainsi "transformée" en une chaîne *A* tout en restant l'image d'une application *f*. Tous les éléments de *E* sont donc représentés dans la chaîne *A*.

E est totalement ordonné par *D*.

---

[1] Si tel n'est pas le cas la chaîne *A* possède un élément final.

[2] On peut dire que l'on substitue *f'* à *f*

[3] L'ensemble *E* donné les graphes les images de toutes les applications *f* sont données imprédicativement, "automatiquement", à l'aide de l'ensemble produit.

[4] Justification : ce raisonnement exige une structure précise (élément initial, successeur et prédécesseur immédiats uniques…). Il est évident (cf.2.1 et suivants) que les propriétés de la relation d'ordre D sont les mêmes que celles de la relation d'ordre naturel de *IN*. Il n'exige rien côté puissance.

3. Puissance des ensembles infinis

3.1 Définition
Tout ensemble qui peut être doté d'une relation D avec élément initial et élément final est dit de type F. Dans le cas contraire il est de type I.

Par conséquent, si un ensemble de type I est totalement ordonné par *S* avec élément initial et élément final, alors *S* n'est pas la relation *D*.
Désormais on dira qu'une relation *S* est de type D si elle a les propriétés d'une relation *D* totale et ayant un élément initial.

3.2 Lemme
Deux ensembles de type I sont équipotents.

Dans ce qui suit on utilise les notations suivantes :

$b = a^+$ si $(a,b) \in A$ (c.a.d. si *b* est successeur immédiat de *a*),

$a \prec b$ si $(a,b) \in D$ (c.a.d. si *b* est successeur de *a*),

D et *A* ayant étés définis dans les chapitres précédents.
D_1, D_2 désignent des relations de type D.

Soient *E* et E' deux ensembles de type I, dotés de D_1 et D_2 respectivement.
Soient *m* et *m'* les éléments initiaux de *E* et E' respectivement, on définit la fonction *f* de *E* sur *E''* telle que :

$f(m) = m'$, et, pour tout $x \in E$, $f(x^+)$ (mod. D_1) $= (f(x))^+$ (mod. D_2).

a) Pour tout $x \in E$, *f(x)* existe.
On raisonne par récurrence[1] sur *E*. Par définition *f(m)* existe. On suppose que c'est vrai pour $n \in E$, alors son successeur immédiat n^+ (il existe car D_1 n'a pas d'élément final) a pour image le successeur immédiat de *f(n)*, $(f(n))^+$, qui existe car D_2 n'a pas d'élément final.

b) Si *a* et *b* sont distincts alors *f(a)* et *f(b)* le sont aussi.
On suppose que $a^+ \neq b^+$ et que $f(a^+) = f(b^+)$, alors :

$f(a^+) = f(b^+) \Rightarrow (f(a))^+ = (f(b))^+ \Rightarrow f(a) = f(b)$

De proche en proche, car tout élément de *E* comme de E' a un prédécesseur immédiat, on aboutit à : il existe un élément $x \in E$ différent de *m* tel que $f(m) = f(x) = m'$. Ceci est impossible car si *t* est le prédécesseur immédiat de *x* alors $f(t) \prec m'$: $f(m) = f(x) = f(t^+) = (f(t))^+ = m'$

c) *f* est donc une injection de *E* dans E'.

d) De la même façon on peut définir une injection de *E'* dans *E*. Les deux ensembles sont donc équipotents.

e) *f* est un isomorphisme de *E* dans E'.
On suppose que $a^+ \prec b^+$ et que $f(b^+) \prec f(a^+)$ alors :

$f(b^+) \prec f(a^+) \Rightarrow (f(b))^+ \prec (f(a))^+$,

donc : $f(b) \prec (f(b))^+ \prec f(a) \prec (f(a))^+$,

conclusion : $f(b^+) \prec f(a^+) \Rightarrow f(b) \prec f(a)$.

En utilisant le même raisonnement qu'en b) on aboutit au cas limite :

$a = m^+, b = x^+$ et $f(x^+) \prec f(f(m^+) \Rightarrow f(x) \prec (f(m) \Rightarrow f(x) \prec m'$. Ce qui est contradictoire.

Par conséquent, et en tenant compte de b) : $a \prec b \Rightarrow f(a) \prec f(b)$.

[1] Justification : voir note page 7/8.

3.3 Lemme
Tout ensemble de type I est infini dénombrable.

Il est évident que - doté de sa relation d'ordre naturel - l'ensemble des entiers naturels *N* est de type I. Tous les ensembles de type I, étant équipotents à *N*, sont infinis dénombrables.

3.4 Lemme
Tout ensemble de type F est fini.

Soit *E* un ensemble de type *F* doté d'une relation *D*, et *f* l'application de *E* dans *N* (ensemble des entiers naturels, doté de sa relation d'ordre naturel) telle que *m* étant élément initial dans *E* :
$f(m) = m' = 0$ et $f(x^+) = (f(x))^+$ pour tout $x \in E$. On démontre que pour tout $x \in E$ il existe un $f(x)$ (même raisonnement qu'en 3.2 a)) ; *f* est une surjection de *E* dans *f*(*E*) ; c'est aussi une injection de *E* dans *f*(*E*) (utiliser le même raisonnement qu'en 3.2 b)). La bijection *f* est aussi un isomorphisme de *E* dans *f*(*E*) (cf. 3.2 e)). Par conséquent *f*(*E*) a un élément initial et un élément final dans *N*, et est une partie finie de *N*. *E* étant équipotent à une partie finie de *N* est un ensemble fini.

3.5 Théorème
Deux ensembles infinis sont équipotents et dénombrables.

Un ensemble infini (il comporte évidemment plus d'un élément) ne peut être de type F. Tout ensemble infini est de type I.

N.B. : D'après l'ensemble des résultats du paragraphe 3, il apparaît que la relation d'ordre *D* est une relation de bon ordre.

Ce résultat contredit - via le théorème (Cantor) stipulant que quel que soit l'ensemble *E*, l'ensemble des parties de *E*, $\mathscr{P}(E)$, est strictement plus puissant que *E* - la théorie des cardinaux transfinis.