

## ***Faut-il quantifier l'Analyse ?*** **- Essai -**

|  |
|--|
| <b>1<sup>ère</sup> histoire courte</b> |
|--|

### 1 - Continuité mathématique

On dit qu'une fonction  $f(x)$  est continue en  $a$  si

- 1)  $f(x)$  converge vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$ ,
- 2)  $f(a) = l$ .

Si on utilise le vocabulaire quantique :

Avec la condition 1) la transition vers l'état  $l$  est *probable* (*incertaine*), la probabilité de transition vers l'état  $l$  n'est pas nulle mais est inférieure à 1.

La condition 2) signifie que la probabilité de transition vers l'état  $l$  est égale à 1. La transition est *certaine*.

La fonction est alors continue et la transition en  $l$  se fait continûment.

## 2 - Le formalisme quantique et la mesure

### 2-1 Le formalisme

En physique quantique le modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement spatio-temporel<sup>1</sup> d'un observable (un électron, un photon) est fondé sur l'équation de Schrödinger et ses solutions, dont les fonctions d'onde.

La fonction d'onde calcule la probabilité de transition d'un état initial vers un autre état. Elle est continue.

Il peut arriver qu'à partir d'un même état initial la particule puisse transiter<sup>2</sup> vers plusieurs états différents.

A chaque état possible est attachée une fonction d'onde et donc une probabilité de transition de l'observable vers cet état. Cette probabilité est  $> 0$  et  $< 1$ . La somme des probabilités associées aux différentes fonctions d'onde est égale à 1.

On est dans l'incertitude, le flou de la *convergence*, aucune transition ne peut se faire vers un de ces états. Il faudrait en effet qu'une, et une seule, des transitions possibles ait une probabilité de 1, les autres ayant une probabilité nulle.

Voilà ce que dit le formalisme. Il s'arrête là, définitivement ...

### 2-2 La mesure

... mais, dans ce cas de figure, la Nature, par le biais de l'expérimentation, dit:

- Lors de chaque expérimentation une et une seule transition a lieu.
- Si l'on fait plusieurs essais le nombre des transitions se répartit sur les fonctions d'onde en respectant les probabilités.

En bref :

La Nature retient les probabilités mais rejette le continu mathématique.  
La transition se fait discontinûment.

---

<sup>1</sup> On peut donc, pour la suite, remplacer "état" par "position".

<sup>2</sup> pas simultanément

|  |
|--|
| <b>2<sup>ème</sup> histoire courte</b> |
|--|

### 1 - A propos du *négligeable*

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle définie sur  $I$  et dérivable en un point  $a \in I$ . Soit  $f_1$  la fonction affine  $f_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

On peut, pour  $x$  proche de  $a$ , remplacer  $f$  par  $f_1$  car  $(f - f_1)x = o(x - a)$ .

Pour tout  $x$ , quand  $x$  tend vers  $a$ ,  $(x - a)$  et  $o(x - a)$  sont deux réels bien déterminés. On définit donc un ensemble  $P$  de réels très petits par rapport à  $(x - a)$ . Ce sont des réels négligeables, ils disparaissent du calcul, annulés en quelque sorte.

On peut évidemment avoir :  $(x - a) = r$  et  $r \in P$ .

### 2 - Les physiciens disent...

Les physiciens, gros consommateurs de mathématiques, nous disent :

- La compétence/validité de la physique classique (non quantique) est limitée: si l'action caractéristique du phénomène physique est très grande par rapport à  $\hbar$ , elle est une approximation valide de la physique quantique.

- Si l'action caractéristique du phénomène est de l'ordre de  $\hbar$ , seule la physique quantique est compétente.

- Un phénomène physique possédant une action caractéristique très inférieure à  $\hbar$  échapperait à la théorie quantique.

### 3 - Sans intention de choquer...

Lorsqu'on approche  $f$  par  $f_1$  pour  $(x - a) = m$  et  $o(x - a) = e$  on considère que  $e$  est nul tout en sachant que ce n'est pas le cas, ce qui revient formellement à  $0 = e \neq 0$ .

En rapprochant 1) et 2) on voit que si dans une théorie on admet l'approximation de  $f$  par  $f_1$  pour  $(x - a) = m$  et  $o(x - a) = e$  alors  $e$  est exclu du champ de validité (compétence) de cette théorie.

Tel est le "coût du négligeable".